

24-5090

НА ДУХУ НЕ СМЕРЯЕТСЯ

МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ
БИОЛОГИЧЕСКИХ ПОПУЛЯЦИЙ:
ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

24-05090



Д.О. Логофет

Н.Г. Уланова

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Д.О. Логофет, Н.Г. Уланова

МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ
БИОЛОГИЧЕСКИХ ПОПУЛЯЦИЙ:
ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

Учебное пособие



МОСКВА – 2024

УДК 512.643.8:581.574.34(075.8)

ББК 20.1+28.5я73

Л69



<https://elibrary.ru/ginedl>

*Рекомендовано к опубликованию решением
Учебного и Учебно-методического советов биологического факультета
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова*

Рецензенты:

В.Г. Онинченко – доктор биологических наук, профессор, заведующий кафедрой экологии и географии растений биологического факультета ФГБОУ ВО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова;

В.Н. Разжевайкин – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Вычислительного центра имени А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН

Логофет Д.О., Уланова Н.Г.

Л69 **Матричные модели биологических популяций: практический курс** : учебное пособие / Д.О. Логофет, Н.Г. Уланова. – Москва : МАКС Пресс, 2024. – 148 с.

ISBN 978-5-317-07182-0

В учебном пособии представлены теория построения и практика применения матричных моделей динамики одновидовых популяций с дискретной структурой – математического инструмента современных исследований в популяционной биологии. Пособие рекомендовано для подготовки бакалавров, магистров и аспирантов по специальностям: 1.5.8 – математическая биология, биоинформатика, 1.5.9 – ботаника, 1.5.15 – зоология. Оно будет полезно и всем специалистам, кто намерен использовать матричный аппарат в своих исследованиях.

УДК 512.643.8:581.574.34(075.8)
ББК 20.1+28.5я73

ISBN 978-5-317-07182-0

© Д.О. Логофет, Н.Г. Уланова, 2024

© Обложка. Д.О. Логофет, 2024

© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2024

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| ПРЕДИСЛОВИЕ | 5 |
| ВВЕДЕНИЕ | |
| §В.1. Популяции с дискретной структурой | 7 |
| §В.2. Скорость роста популяции как мера адаптации | 8 |
| §В.3. Граф жизненного цикла | 9 |
| ГЛАВА 1. МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИИ С ВОЗРАСТНОЙ СТРУКТУРОЙ | |
| §1.1. Постулаты модели, граф жизненного цикла и матрица Лесли | 13 |
| §1.2. Свойства модели с матрицей Лесли | 18 |
| §1.3. Влияние демографических параметров на потенциал роста популяции (чувствительность λ_1) | 26 |
| §1.4. Упражнения | 29 |
| ГЛАВА 2. МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИИ СО СТАДИЙНОЙ СТРУКТУРОЙ | |
| §2.1. Постулаты модели, граф жизненного цикла и матрица Лефковича | 31 |
| §2.2. ГЖЦ пашенного червя <i>Aporrectodea caliginosa</i> и стадийная модель | 35 |
| §2.3. Индикатор потенциального роста $R_1(L)$ и другие индикаторы | 40 |
| §2.4. Еще раз о диагональных элементах проекционной матрицы | 46 |
| §2.5. Упражнения | 47 |
| ГЛАВА 3. БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ ЖИЗНЕННЫЕ ЦИКЛЫ: УСКОРЕНИЯ И ВОЗВРАТЫ | |
| §3.1. Жизненный цикл и шкала онтогенеза | 49 |
| §3.2. «Определенные особи» и калибровка проекционной матрицы | 54 |
| §3.3. «Определенные особи от неизвестных родителей» и репродуктивная неопределенность | 60 |
| §3.4. Когда зацветает и сколько лет живет малолетник? | 64 |
| §3.5. Может ли агрегация избавить модель от репродуктивной неопределенности? | 70 |
| §3.6. *Гибель или вторичный покой? Ревизия модели | 74 |
| §3.7. Упражнения | 80 |

**ГЛАВА 4. ДВОЙНАЯ СТРУКТУРА ПОПУЛЯЦИИ:
ПОЛИВАРИАНТНЫЙ ОНТОГЕНЕЗ**

§4.1. Понятие и примеры популяций с двойной структурой81
§4.2. *Calamagrostis epigeios*: двойная структура
без блочного строения матрицы L 88
§4.3. Калибровка проекционной матрицы
как решение диофантовых уравнений97
§4.4. Структура и конкуренция: береза побеждает вейник101
§4.5. Упражнения114

**ПРИЛОЖЕНИЕ: МАТРИЦЫ И ГРАФЫ
(СВЕДЕНИЯ ИЗ МАТЕМАТИКИ)**

§П.1. Что такое матрица, вектор, скаляр116
§П.2. Арифметические операции с матрицами и векторами. 119
§П.3. Определитель матрицы и решение системы линейных
алгебраических уравнений (обратная матрица) 122
§П.4. Собственные векторы и соответствующие им собственные числа .. 124
§П.5. Характеристический многочлен квадратной матрицы 127
§П.6. Орграф, ассоциированный с матрицей129
§П.7. Специальный класс матриц:
неотрицательные квадратные матрицы.133

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО ЧТЕНИЯ141

ЦИТИРОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ142